La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

Tal com s'ha dit en números anteriors, l'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho, demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i, els guanyadors, se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de gener de 2005 a:
probuni@ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@ffn.ub.es (nivell de batxillerat).

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

Luis Carlos Pardo Soto, professor de la UPC, ens ha fet arribar el problema següent:

Com és sabut, d'aquí a 10^9 anys la brillantor del Sol creixerà tant que eliminarà tota possibilitat de supervivència en el nostre planeta. Per tal que la vida, tal com la coneixem, no desaparegui, D. G. Korycansky i d'altres ens proposen, en l'article «Astronomical engineering: a strategy for modifying planetary orbits», publicat a la revista *Astrophysics and Space Science*, dues solucions: la primera comporta que tota la biomassa del planeta (que suposarem de 10^{20} kg) abandoni el lligam amb el camp gravitatori terrestre, és a dir, que assoleixi la velocitat d'escapament; i la segona, canviar el radi de l'òrbita de la Terra (que suposarem circular) d'$1,50 \cdot 10^{11}$ m fins a $2,20 \cdot 10^{11}$ m. Quina d'aquestes dues possibilitats teòriques té un cost energètic més petit? Dades:

$M_{\text{Sol}} = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg
$R_{\text{Terra}} = 6,37 \cdot 10^{6}$ m $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

Problema per a l'alumnat universitari

L'halo solar consisteix en un cercle lluminós que es forma al voltant del Sol. Es produeix per la refracció de la llum als cristalls de gel, presents a l'atmosfera, principalment en núvols de tipus alt.

Si els cristalls de gel tenen forma de prisma hexagonal i el seu índex de refracció és 1,309, trobeu l'angle de separació entre el Sol i el seu halo.

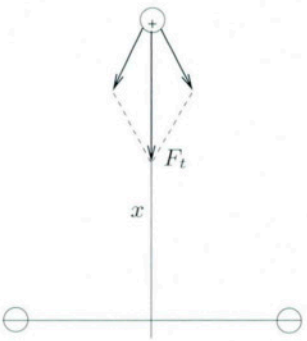
Solució als problemes del número 26 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat
Marina Riquelme Morell, alumna de 2n de batxillerat de l'IES Sixto Marco d'Elx, ens ha enviat la solució següent:

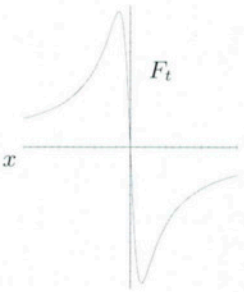
Suposem que, tot i tractar-se del moviment d'una càrrega accelerada, no s'emet radiació electromagnètica.

Suposem també que l'única força que actua sobre la càrrega positiva és la força total, F_t, que resulta de sumar les forces de Coulomb entre les dues càrregues puntuals negatives sobre la positiva. Se'n dedueix que:

$$F_t = \frac{1}{(0,1^2 + x^2)^{3/2}}[0, \ -0,018\,x].$$



Forces que actuen sobre la càrrega positiva



Variació de la força que actua sobre la càrrega positiva

a) Si tenim en compte que aquestes forces són conservatives i no actua cap altra força externa al sistema

$$\Delta E_{\text{mecànica}} = 0,$$

és a dir,

$$\frac{2kQQ_3}{r_f} - \frac{2kQQ_3}{r_i} + \frac{1}{2}mv_f^2 = 0.$$

D'on s'obté, després de substituir els valors coneguts, la velocitat $v_f = 17,01$ m/s de Q_3 quan passa per $[0, 1,\ 0]$.

b) No descriu un moviment harmònic simple (MHS), ja que, perquè això ocorri, F_t hauria de ser proporcional a l'elongació, x.

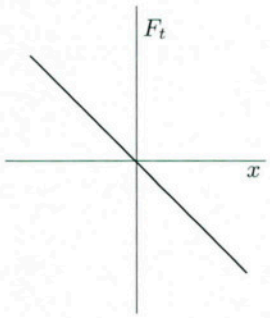
No obstant això, s'observa que en desenvolupar en sèrie

$$\frac{1}{(0,1^2 + x^2)^{3/2}},$$

per a valors de $x \ll 0,1$, l'expressió anterior tendeix a 10^3 i, per tant,

$$F_t = (0; -18x).$$

Així doncs, sota aquestes condicions cal esperar un MHS.

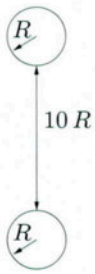


Del problema per a l'alumnat universitari

Aplicació del principi d'incertesa

Clàssicament, una pilota de ping-pong perfectament elàstica que cau sobre una esfera fixa perfectament elàstica del mateix radi, si està perfectament alineada botarà una infinitat de vegades.

Si la pilota no està perfectament alineada, al cap de pocs rebots sortirà fora. Es pot calcular que per a l'angle del punt d'impacte més gran de 0,0125 rad el rebot surt directament fora.



Però, quànticament, el principi d'incertesa ens diu que és impossible que la pilota caigui perfectament vertical, per la impossibilitat de determinar la posició i el moment sense error:

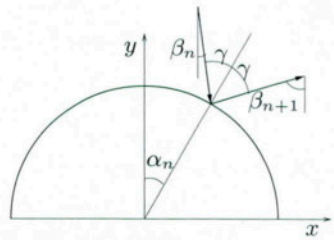
$$\Delta x \Delta p \geq \hbar. \tag{1}$$

Si ha ha un error en la posició i el moment de la pilota en el primer xoc, aquest error creixerà amb cada rebot i, per tant, hi ha un nombre màxim de rebots pel qual l'error en la mesura de la posició és més gran que el radi de la pilota.

Primer calcularem com rebota la pilota per, després, poder determinar com creix l'error en la mesura i finalment estimar el nombre màxim de rebots.

Durant el rebot la pilota incideix amb una velocitat V que té un angle β_n respecte de la vertical. El punt d'incidència es troba a un angle α_n i com que el xoc és perfectament elàstic l'angle d'incidència és igual a l'angle de sortida γ. La pilota sortirà rebotada amb la mateixa velocitat i un angle β_{n+1} donat per

$$\beta_{n+1} = \beta_n + 2\alpha_n, \tag{2}$$



després la pilota descriu una paràbola d'equacions:

$$R\sin(\alpha_{n+1}) = R\sin(\alpha_n) + V_x t,$$
$$R\cos(\alpha_{n+1}) = R\cos(\alpha_n) + V_y t - \frac{1}{2}gt^2, \tag{3}$$

on V_x i V_y es defineixen com

$$V_x = V\sin(\beta_{n+1}), V_y = V\cos(\beta_{n+1}). \tag{4}$$

Considerant l'aproximació $\alpha_n \ll 1$ podem aïllar t i determinar l'equació per les x:

$$R\alpha_{n+1} = R\alpha_n + \frac{V^2}{g}\sin(2\beta_{n+1}). \tag{5}$$

Com sabem que cau d'una altura de 10 vegades el radi podem determinar la velocitat per conservació de l'energia:

$$V = \sqrt{20gR} \tag{6}$$

i, per tant, si suposem que β_n també és petit,

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + 40\beta_{n+1}. \tag{7}$$

Amb les equacions 2 i 7 obtenim el criteri de recurrència següent:

$$\alpha_{n+1} = 81\alpha_n + 40\beta_n, \qquad \beta_{n+1} = 2\alpha_n + \beta_n. \tag{8}$$

Clàssicament, donades unes condicions inicials α_0 i β_0 aquesta equació ens determinarà tots els rebots següents. Quànticament, tenim un error en la mesura de α_0 i β_0 que vol dir que tenim dues distribucions de probabilitat centrades en $\alpha_0 = 0$ i $\beta_0 = 0$ amb un error típic donat per $\Delta\alpha_0$ i $\Delta\beta_0$.

Aplicant la propietat següent per a la desviació estàndard de les distribucions

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{X'}^2 \\ \sigma_{Y'}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^2 & B^2 \\ C^2 & D^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_X^2 \\ \sigma_Y^2 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Fent servir les equacions (8) obtenim la recurrència per als errors en la mesura de α i β:

$$\Delta\alpha_{n+1}^2 = 81^2\Delta\alpha_n^2 + 40^2\Delta\beta_n^2 \tag{10}$$
$$\Delta\beta_{n+1}^2 = 2^2\Delta\alpha_n^2 + \Delta\beta_n^2. \tag{11}$$

Hi apliquem les relacions

$$p_0 = mV_{0x} = mV\sin(\beta_0) \simeq mV\beta_0 \qquad (12)$$

$$x_0 = R\sin(\alpha_0) \simeq R\alpha_0. \qquad (13)$$

Amb l'equació (1) obtenim el principi d'incertesa per a $\Delta\alpha_0$ i $\Delta\beta_0$:

$$\Delta\alpha_0\Delta\beta_0 \geq \frac{\hbar}{mVR}. \qquad (14)$$

Per motius de notació definim

$$k_0 = \frac{\hbar}{mVR}. \qquad (15)$$

Elevant l'equació (14) al quadrat i considerant que el mínim error s'obté amb la igualtat, tenim

$$\Delta\alpha_0^2\Delta\beta_0^2 = k_0^2. \qquad (16)$$

Aïllant $\Delta\alpha_0^2$ i substituint-ho en l'equació (10),

$$\Delta\alpha_1^2 = 81^2\Delta\alpha_0^2 + 40^2\frac{k_0^2}{\Delta\alpha_0^2}. \qquad (17)$$

Minimitzant aquesta equació obtindrem el mínim valor possible per a $\Delta\alpha_1^2$ i, per tant, qualsevol valor obtingut sempre serà mes gran:

$$\Delta\alpha_1^2 \geq 6480\,k_0. \qquad (18)$$

Aïllant de l'equació (16) $\Delta\beta_0^2$ i substituint-ho en l'equació (11),

$$\Delta\beta_1^2 = 2^2\frac{k_0^2}{\Delta\beta_0^2} + \Delta\beta_0^2. \qquad (19)$$

Minimitzant obtenim el valor mínim possible per a $\Delta\beta_1^2$:

$$\Delta\beta_1^2 \geq 4k_0. \qquad (20)$$

Les equacions (18) i (20) defineixen el principi d'incertesa per a les mesures de α_1 i β_1:

$$\Delta\alpha_1\Delta\beta_1 \geq 72\sqrt{5}k_0, \qquad (21)$$

on, si definim

$$k_1 = 72\sqrt{5}k_0, \qquad (22)$$

podem tornar a repetir el càlcul de l'equació (16) fins a la (21) tantes vegades com vulguem, trobem la recurrència:

$$k_{n+1} = 72\sqrt{5}k_n, \qquad k_0 = \frac{\hbar}{mVR}, \qquad (23)$$

$$\Delta\alpha_{n+1} \geq 36\sqrt{5k_n}, \qquad \Delta\beta_{n+1} \geq 2\sqrt{k_n}. \qquad (24)$$

Solucionant aquesta recurrència podem escriure

$$k_n = \left(72\sqrt{5}\right)^n \frac{\hbar}{mVR}. \qquad (25)$$

I l'error en la mesura de α queda

$$\Delta\alpha_{n+1} \geq 36\sqrt{5}\left(72\sqrt{5}\right)^{n/2}\sqrt{\frac{\hbar}{mVR}}. \qquad (26)$$

Imposant que $\Delta x_n < R$ per a l'equació (13) tenim que $\Delta\alpha_n < 1$ i podem aïllar n de l'equació (26):

$$n \leq -2\frac{\ln\left(36\sqrt{5}\sqrt{\frac{\hbar}{mVR}}\right)}{\ln(72\sqrt{5})}. \qquad (27)$$

Considerant que la pilota de ping-pong té una massa de 2,5 g i un radi de 19 mm valorem l'equació anterior i obtenim

$$n \leq 11. \qquad (28)$$